Einführung in die Fehlerrechnung

1 Motivation

Ziel des Praktikums ist es, neben dem Kennenlernen der Messtechnik und der Methodik des Messens auch Erfahrungen in der Bewertung von Messergebnissen zu sammeln. Denn um aus den Ergebnissen eines Experiments schließen zu können, ob ein theoretisches Modell gültig ist oder nicht, muss die Qualität und Aussagekraft der Messung bekannt sein.
Grundsätzlich ist jede Messung einer physikalischen Größe mit Fehlern behaftet, wobei man nach DIN 1319 (Deutsches Institut für Normen e.V.) besser nicht von Fehlern, sondern von Ab-weichungen bei den Messwerten und von Unsicherheiten bei den Messergebnissen sprechen sollte.
Deshalb muss in jedem Praktikumsbericht neben dem Messergebnis auch die Angabe der Messunsicherheit vorhanden sein, d.h. die Angabe des Intervalls, in dem mit einiger Sicherheit das Messergebnis liegt.
In der üblichen Konvention wird ein Messergebnis für eine Größe x wie folgt angegeben:

$$\mathbf{x = x_w \pm \Delta x} \qquad (1)$$

Dabei ist x_w der „wahrscheinlichste“ oder „beste Schätzwert“ für das Messergebnis, Δx ist die Messunsicherheit. Die Angabe bedeutet, dass das Messergebnis mit einiger Sicherheit im Intervall $\mathbf{x_w - \Delta x \leq x \leq x_w + \Delta x}$ liegt.
In dieser Form wird Δx auch die absolute Messunsicherheit genannt.

2 Fehlerarten

Gemäß ihres Ursprungs unterscheidet man prinzipiell drei Arten von Messfehlern: Grobe Fehler, systematische Fehler und zufällige Fehler, die im Folgenden erläutert werden.

2.1 Grobe Fehler

Grobe Fehler sind eigentlich „unerlaubte Fehler“ und sollten durch Sorgfalt, kritisches Überprüfen und Kontrollieren der Ergebnisse vermieden werden.
Ursache für grobe Fehler:

- Unachtsamkeit
- Versehen des Beobachters bei der Bedienung der Messapparatur
- Falsches Ablesen der Messinstrumente
- Messverfahren oder Messbedingungen sind ungeeignet
- Irrtum des Beobachters bei der Protokollierung bzw. bei der Auswertung der Messwerte.

In diesem Fall sind die Messungen oder Auswertungen falsch und müssen wiederholt werden. Grobe Fehler können offensichtlich nicht durch eine Fehlertheorie erfasst werden und werden hier nicht weiter diskutiert.

2.2 Systematische Fehler

Systematische Fehler beeinflussen das Messergebnis unter identischen Messbedingungen stets in gleichem Sinne. Bei Wiederholung einer Messung unter gleichen Bedingungen sind sie nach Betrag und Vorzeichen konstant, können also durch Wiederholen der Messung weder erkannt noch vermieden werden.

Ursachen für systematische Fehler:

- Verwendung falscher Messinstrumente
- Falsche elektrische Schaltung
- Alterung der Messgeräte
- Unvollkommenheit des Messgegenstandes (Inhomogenitäten, Mangel an Reinheit)
- Überschreiten der Gültigkeitsgrenzen physikalischer Gesetze (z.B. Elastizitätsgrenze)
- Äußere Einflüsse (Luftauftrieb, Temperatur, äußere Störfelder)

Durch Berücksichtigung der Einflüsse können systematische Fehler teilweise korrigiert bzw. ausgeschaltet werden, (z.B. durch Variation der Messmethoden oder der Messbedingungen oder durch Kalibrierung).
Dies erfordert jedoch oft großen Aufwand und ist daher unter Praktikumbedingungen kaum möglich.
Systematische Fehler werden bei der Fehlerrechnung und bei der zahlenmäßigen Fehlerangabe im Ergebnis nicht berücksichtigt. Das schließt jedoch eine Diskussion von Fehlermöglichkeiten systematischer Herkunft nicht aus. Es bleibt aber meist ein systematischer Restfehler (meist Genauigkeit des Messgerätes), der nicht weiter eliminiert werden kann und zusammen mit dem Messwert angegeben werden muss.

2.3 Zufällige Fehler

Selbst bei völliger Ausschaltung aller systematischer Fehler erhält man bei mehrmaliger Messung der gleichen physikalischen Größen nie genau übereinstimmende Messergebnisse. Die Messwerte streuen um den wahren Wert. Diese Abweichung bezeichnet man als zufällige Fehler, sie gehorchen den Gesetzen der Statistik.
Ursachen für zufällige Fehler:

- Die Messgröße selbst besitzt einen stochastischen Charakter z.B. der radioaktive Zerfall von Atomkernen.
- Quanteneffekte (Rauschen, Fluktuationen)
- Zufällige und unvorhersehbare äußere Einflüsse z.B. wechselnde Luftströmungen, kurzzeitige Temperaturschwankungen.
- Endliches Auflösungsvermögen der Messanordnung.
- Die Reibung in einem Messinstrument
- Ableseabweichungen (Parallaxe)
- Schätzungen und Interpolationen auf Mess-Skalen.
- Messungen mit Stoppuhr (Reaktionszeit des Beobachters)

Zufällige Fehler sind prinzipiell nicht vermeidbar, lassen sich jedoch durch wiederholte Messungen und geeignete Auswertungsmethoden verringern.

3 Rechnerische Erfassung der Messabweichungen

Die Fehlerrechnung beantwortet folgende Fragen:

- Wie schätzt man den Fehler, wenn die Messgröße nur einmal direkt gemessen wird?
- Wie weit entfernt sich der einzelne Messwert durchschnittlich vom Mittelwert? Ein Maß hierfür ist der mittlere Fehler der Einzelmessung oder die Standardabweichung.
- Wie weit entfernt sich der gemessene Mittelwert vom wahren Wert? D.h. wie groß ist der mittlere Fehler des Mittelwerts oder Vertrauensbereich des Mittelwertes?
- Wie weit entfernt sich ein Funktionswert vom wahrem Wert, wenn er nicht selbst gemessen, sondern aus fehlerbehafteten Größen errechnet wurde? D.h. wie groß ist der mittlere und maximaler Fehler eines Funktionswertes?

3.1 Fehlerabschätzung einmaliges Messen

Wird eine Messgröße x nur einmal direkt gemessen, kann man auf Grund statistischer Überlegungen keine Aussage über die Größe des Fehlers machen. In diesem Fall ist man auf die Angabe eines geschätzten Größtfehlers angewiesen, der sich im wesentlichen aus der Ablesegenauigkeit auf der benutzten Skala, aus der Genauigkeitsklasse der Messgeräte und aus anderen Erwägungen ergibt.

<u>Beispiel:</u>

1) $\Delta x = 0{,}5$ * Wert der kleinsten Skalenteilung
   - $\Delta l = 0{,}5$ mm für Lineale mit Millimeterskala
   - $\Delta t = 0{,}1$ K für Thermometer mit 0,2 Grad Teilung

2) $\Delta l = 0{,}05$ mm für Nonius mit 1/20 mm Einstellung

3) Genauigkeitsklassen von Analogenmessgeräten z.B. 1,5 bedeutet, dass
   $\Delta x = 1{,}5$ % vom Messbereichsendwert zu nehmen ist.

3.2 Mittelwert einer Messreihe

Führt man mit einer bestimmten Messanordnung und unter konstant gehaltenen Messbedingungen sehr viele Messungen n (im Idealfall unendlich viele) der gleichen Größe x durch, dann liegen die Messwerte in einem bestimmten Bereich und der am häufigsten vorkommende Messwert etwa in der Mitte dieses Bereiches (sofern nur zufällige Fehler auftreten). Dabei sind große Abweichungen von der Mitte des Bereiches selten, kleine Abweichungen häufiger. Trägt man die Häufigkeit h(x), mit der ein Messwert auftritt, über den Messwerten auf, so ergibt sich (im Grenzfall für $n \to \infty$) eine Verteilung, die man <u>Gaußsche Normalverteilung</u> nennt (siehe Abb. 1).

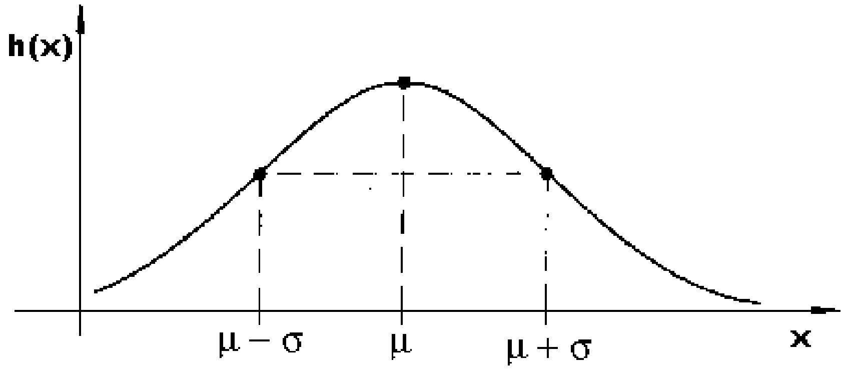

Abb. 1 Gaußsche Normalverteilung

Die Gauß'sche Normalverteilung wird durch die Funktion h(x) dargestellt.

$$h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (2)$$

Diese Normalverteilung (siehe Abb. 1) nimmt für $x = \mu$ ihren maximalen Wert an, d.h. μ stellt den „wahrscheinlichsten Wert" der Messreihe dar und wird Erwartungswert genannt.
Die Wendepunkte der Verteilungsfunktion h(x) liegen bei den Werten $x = \mu \pm \sigma$.
Charakteristisch für diese Kurve ist die Breite 2σ zwischen den beiden Wendepunkten der kurve.
Man nennt σ (halbe Breite) die Standardabweichung. Die Größe σ^2 wird als Varianz bezeichnet.
Die Standardabweichung σ ist ein Maß für die Breite der Verteilung, also für die durchschnittliche zufällige Abweichung der einzelnen Messwerte vom wahrscheinlichsten Wert der (unendlichen) Messreihe.
Für die Gaußsche Normalverteilung ergibt sich, dass 68,3 % der Messwerte im Intervall $\mu \pm \sigma$ liegen, d.h. die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert in diesem Intervall anzufinden beträgt 68,3 %, 31,7 % außerhalb. Mit ihr rechnet man oft bei physikalischen Messungen. Wenn man eine Aussage mit einer größeren statistischen Sicherheit machen möchte, so muss man als Messunsicherheit die doppelte (2σ) oder gar dreifache Standardabweichung (3σ) verwenden. Dann beträgt die statistische Sicherheit 95,5 % bzw. 99,7 %.
Um die Bedeutung der Standardabweichung σ besser erkennen zu können betrachten wie den Verlauf der Funktion h(x) für verschiedene Werte σ_1 und σ_2.

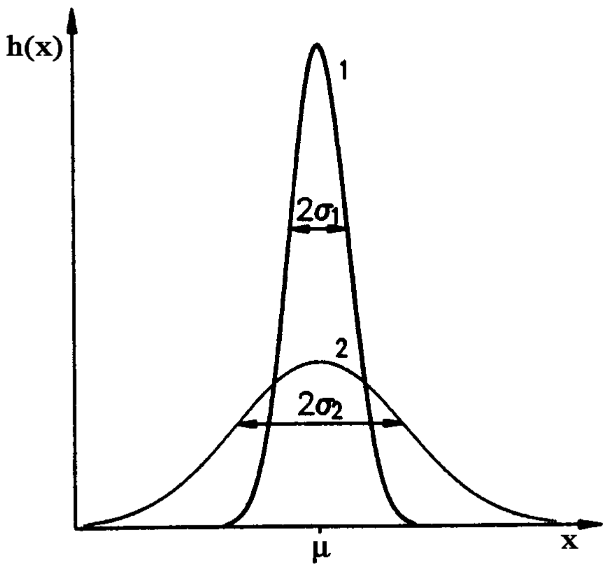

Abb. 2 Verteilungsfunktion h(x)

Abbildung 2 zeigt die Verteilungsfunktion h(x) von zwei verschiedenen Messreihen mit gleichem Erwartungswert μ. Die durch die Verteilungsfunktion 1 beschriebene Messreihe repräsentiert die präzisere Messung. Die zugehörige Verteilungsfunktion hat bei $x = \mu$ eine scharfe Spitze und eine kleine Standardabweichung σ_1. Die ungenauere Messung enthält die Messreihe 2. Die entsprechende Verteilungsfunktion hat ein niedrigeres, flacheres Maximum und eine größere Standardabweichung.
In der Praxis können keine unendlich langen Messreihen durchgeführt werden.
Werden n Messungen einer Größe x durchgeführt ($x_1, x_2, \ldots x_n$), dann können die Werte μ und σ nur näherungsweise bestimmt werden. Der Erwartungswert μ wird dabei angenähert durch den arithmetischen Mittelwert $\bar{x}$.

$$\mu = \lim_{n \to \infty} \bar{x} \tag{3}$$

Der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ wird folgendermaßen gebildet:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4}$$

wobei $x_i \triangleq$ Messwert
$n \triangleq$ Zahl der Messungen.

3.3 Standardabweichung

Bei einer endlichen Anzahl n von Messungen lässt sich aus den (zufälligen) Schwankungen der Messwerte x_i ein bestmöglicher Schätzwert s (Streuung) für die Standardabweichung σ mit Hilfe folgender Formel ermitteln:

$$\mathbf{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^2}{\mathbf{n}-1}} \qquad (5)$$

wobei $s \triangleq$ Streuung

$x_i \triangleq$ Messwert

$\bar{\mathbf{x}} \triangleq$ Mittelwert der Messreihe

$n \triangleq$ Anzahl der Messungen

Für $n \to \infty$ konvergiert s gegen σ (d.h. $\lim_{n\to\infty} \mathbf{s} = \sigma$).

Haufig wird die Streuung s als mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung (und häufig fälschlich auch mit σ) bezeichnet.

3.4 Vertrauensbereich

Für die Analyse der Messdaten ist der mittlere Fehler der Einzelmessung i. a. nicht bedeutsam. Interessanter ist es zu wissen, in welchem Intervall um den Mittelwert $\bar{\mathbf{x}}$ herum man den wahren Wert der Größe x erwarten kann. Dieses Intervall heißt Vertrauensbereich.
Er bestimmt den Bereich, innerhalb dessen der wahre Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (statistische Sicherheit P) liegt und wird häufig als mittlerer Fehler des Mittelwertes bezeichnet.
Für eine endliche Anzahl von Messungen erhält man

$$\Delta\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{t}\frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{n}}} = \mathbf{t}\sqrt{\frac{1}{\mathbf{n}(\mathbf{n}-1)}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^2} \qquad (6)$$

wobei der sog. „t- Faktor“ eine Korrektur für Messreihen mit kleinem n darstellt (siehe Tabelle 1). Der Faktor t ergibt sich aus der gewählten statistischen Sicherheit P und der Anzahl n der Messwerte.

Anzahl n der Einzelwerte	P = 68,26% t	P = 95% t	P = 99% t	P = 99,5% t
2	1,84	12,71	63,66	127,3
3	1,32	4,30	9,93	14,09
4	1,20	3,18	5,84	7,45
5	1,15	2,78	4,60	5,60
6	1,11	2,57	4,03	4,77
7	1,09	2,45	3,71	4,32
8	1,08	2,37	3,50	4,03
9	1,07	2,31	3,36	3,83
10	1,06	2,26	3,25	3,69
13	1,05	2,18	3,05	3,43
15	1,04	2,15	2,98	3,33
20	1,03	2,09	2,86	3,17
30	1,02	2,05	2,76	3,04
32	1,02	2,04	2,74	3,02
50	1,01	2,01	2,68	2,94
80	1,00	1,99	2,64	2,89
100	1,00	1,98	2,63	2,87

Tabelle 1

In der Physik (und in der Vermessungstechnik) wird i. a. mit P = 68,26 % gearbeitet. In der allgemeinen Technik und in der Industrie wird i. a. P = 95% bevorzugt. In der Biologie wird i. a. mit P = 99 % oder P = 99,5 % gearbeitet.

3.5 Fehlerfortpflanzung

In vielen Fällen ist die gesuchte Größe nicht direkt messbar, sondern muss mit Hilfe von zugänglichen Größen indirekt bestimmt werden.
Sei G die im Experiment zu bestimmende Größe, x, y, z usw. die unmittelbar gemessenen Größen, die alle mit einem Fehler behaftet sind (Δx, Δy, Δz usw.)

$$\mathbf{G = f(x,y,z,\ldots)}.$$

Es stellt sich dann die Frage, wie die Fehler der unmittelbar gemessenen Größen x, y, z,… den Fehler der Größe G beeinflussen.
Die Messfehler der direkt gemessenen Größen x, y, z,… pflanzen sich in das Ergebnis G fort.
Bei der Bestimmung von ΔG muss man zwei Fälle unterscheiden.

3.5.1 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Sind die Messgrößen x, y, z, usw. unabhängig voneinander mit zufälligen Messabweichungen Δx, Δy, Δz, usw., so ergibt sich die wahrscheinlichere Messunsicherheit ΔG aus der so genannten quadratischen Addition (Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz).

$$\boldsymbol{\Delta G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\Delta z\right)^2 + \ldots}} \qquad (7)$$

Dabei $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ usw. ≙ Vertrauensbereich des Mittelwertes der einzelnen Messgrößen

$\boldsymbol{\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}}$ usw. ≙ partielle Ableitung der Funktion G = f(x, y, z usw.) nach den Messgrößen x, y, z usw.

In den meisten Fällen kann man sich die Bildung des partiellen Differentialquotienten ersparen, da sich die Gleichung *(7)* für bestimmte Arten von Funktionen vereinfachen lässt.

Bemerkung:

- Die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung basiert auf rein statistisches Überlegen. Sie ist also zur Verarbeitung statistisch ermittelter Fehler geeignet.
- Sie ist zu empfehlen, wenn die einzelnen Messgrößen etwa gleichgroße Beiträge zur Gesamt-Messunsicherheit liefern.
- In Gleichung *(7)* ist berücksichtigt, dass sich die Fehler der einzelnen Messgrößen teilweise kompensieren.

Beispiel:

Wir betrachten als Beispiel die funktionelle Form:

$$G = x^a\, y^b\, z^c$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = a x^{a-1} y^b z^c = a\frac{G}{x} \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = b x^a y^{b-1} z^c = b\frac{G}{y} \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = c x^a y^b z^{c-1} = c\frac{G}{z}$$

$$\Delta G = \sqrt{\left(a\frac{G}{x}\Delta x\right)^2 + \left(b\frac{G}{y}\Delta y\right)^2 + \left(c\frac{G}{z}\Delta z\right)^2}$$

Für den relativen Fehler erhält man in diesem Fall:

$$\frac{\Delta G}{G} = \sqrt{\left(a\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(b\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(c\frac{\Delta z}{z}\right)^2}$$

3.5.2 lineare Fehlerfortpflanzung (Größtfehler)

Unter der Voraussetzung $\Delta x \ll x$, $\Delta y \ll y$, $\Delta z \ll z$, usw. kann man auf Grund des Taylorschen Satzes den Gesamtfehler ΔG wie folgt berechnen:

$$\boldsymbol{\Delta G = \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|\Delta z + \ldots} \qquad (8)$$

wobei $\Delta G \triangleq$ Maximalfehler (Größtfehler)

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ usw. $\triangleq$ Vertrauensbereich des Mittelwertes oder geschätzter Fehler der Messgröße oder Fehlergrenze des Messgerätes.

Gleichung *(8)* entsteht aus $G(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z,\ldots)$ durch eine Taylorentwicklung, die nach dem ersten Glied abgebrochen wurde.

Die $\left|\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}\right|$ usw. sind die Beträge der partiellen Ableitungen nach den gemessenen Größen x, y, z, usw. Die Betragsstriche bewirken, dass alle Summanden positiv werden, wodurch eine mögliche gegenseitige Kompensation von Einzelfehlern vermieden wird. So erhält man stets den größtmöglichen Fehler der Größe G.

Beachte:

- Der Größtfehler stellt den ungünstigsten Fall, eine obere Grenze für die Messunsicherheit dar. Er überschätzt i. a. die Messunsicherheit, da es sehr unwahrscheinlich ist, dass alle unabhängigen Größen gleichzeitig ihre maximalen bzw. minimalen Werte annehmen.
- Der Größtfehler ist zu empfehlen, wenn einige der Messunsicherheiten wesentlich größer sind als die anderen, dann ist die Gefahr der Überschätzung der Messunsicherheit ΔG geringer.
  Außerdem ist er anzuwenden, wenn die einzelnen Messgrößen nicht unabhängig voneinander sind.

Beispiel:

Betrachten wir wieder das Potenzprodukt $G = x^a\, y^b\, z^c$. Dann erhält man für den Größtfehler den einfachen Zusammenhang:

$$\frac{\Delta G}{G} = |a|\frac{\Delta x}{x} + |b|\frac{\Delta y}{y} + |c|\frac{\Delta z}{z}\,.$$

3.6 Graphische Auswertung von Messdaten

Die graphische Darstellung (Geradenanpassung) einer Messreihe dient nicht nur dazu, eine Veranschaulichung des funktionellen Zusammenhanges zweier Messgrößen zu vermitteln, sondern kann auch zur quantitativen Auswertung verwendet werden. Beim Zeichnen der graphischen Darstellung beachte man:

- Verwendung von Millimeterpapier (zu empfehlen)
- Wahl einer geeigneten Skalierung, die den gesamten Wertebereich ausnützt.
- Beschriftung der Achsen und Einfügen eines Titels.
- Sorgfältige Eintragung der Messpunkte als kleine Kreuze.
- Bei bekannter Messabweichungen werden die Messpunkte mit Fehlerbalken versehen.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie eine graphische Geradenanpassung durchzuführen ist. Als Messwerte hat man Daten (x, y), für die der funktionale Zusammenhang y = ax + b (z.B.

$U = R\,I + U_0$) lautet. Es wird angenommen, dass die Fehler der x-Werte vernachlässigt werden können. (Wenn man Fehler in x- und y-Richtung hat so sind diese natürlich beide zu berücksichtigen.) Zur Auswertung werden Daten mit Fehlerbalken in y-Richtung (und x-Richtung) in ein Diagramm eingetragen. Danach werden zwei Geraden mit maximaler bzw. minimaler Steigung so durch die Messwerte gelegt, dass möglichst alle Fehlerbalken (Fehlerflächen) berührt werden. Mit Hilfe von Steigungsdreiecken, die einzuzeichnen sind, wird, wie in Abb. 3 dargestellt, die Steigung bestimmt. Aus den zwei Werten (a_1 und a_2) bestimmt man dann die Steigung und den Fehler. Analog verfährt man mit den Werten für b.

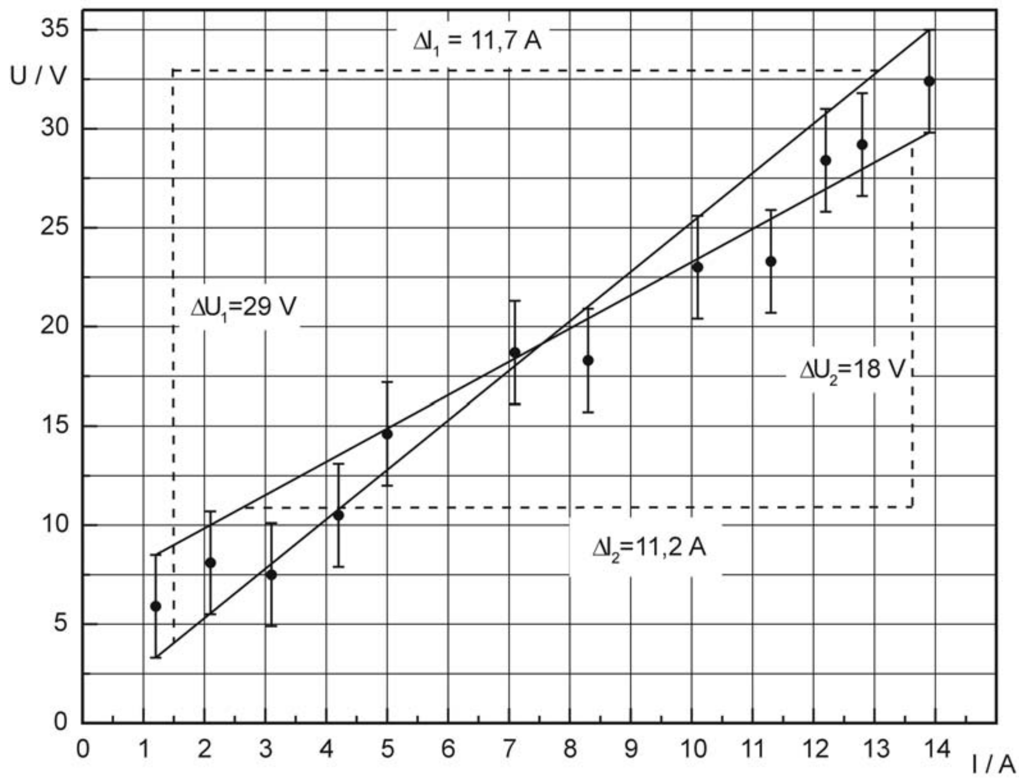

Abb. 3 Geradenanpassung

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}}{2} \qquad \Delta\mathbf{a} = \left|\frac{\mathbf{a_1} - \mathbf{a_2}}{2}\right|$$

z.B.

$$R = \left(\frac{2{,}48 + 1{,}61}{2}\right)\Omega = 2{,}05\,\Omega \qquad \Delta R = \left|\frac{2{,}48 - 1{,}61}{2}\right|\Omega = 0{,}44\,\Omega$$

$$R = (2{,}1 \pm 0{,}4)\ \Omega$$

3.7 Darstellung des Messergebnisses

In der üblichen Konvention wird ein Messergebnis für eine Größe x wie folgt angegeben:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_w} \pm \Delta\mathbf{x}.$$

Dabei Ist x_w der „wahrscheinlichste“ oder „beste Schätzwert“ für das Messergebnis, Δx ist die Messunsicherheit.
In dieser Form wird Δx die absolute Messunsicherheit genannt und hat die gleiche Dimension wie das Messergebnis, z.B.:

$$g = (9{,}81 \pm 0{,}02)\ \mathrm{m/s^2}$$

Ebenso existiert die Darstellung für x mit dem relativen Fehler $\frac{\Delta x}{x_w}$, wobei $\left[\frac{\Delta x}{x_w}\right] = 1$ (dimensionslose Größe):

$$x = x_w \left(1 \pm \frac{\Delta x}{x_w} \cdot 100\%\right)$$

z.B. $g = 9{,}81\ (1 \pm 0{,}3\%)\ \mathrm{m/s^2}$